

УДК 550.362

doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-3

Теплообмен и магнитная гидродинамика жидкости в сферическом слое. Часть 1

С. В. Соловьев

Вычислительный центр Дальневосточного отделения

Российской академии наук, Хабаровск, Россия

solovjovsv@rambler.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Процессы теплообмена электропроводной жидкости в замкнутых объемах (в частности, в сферических концентрических слоях) играют важную роль для широкого круга задач космической техники, атомной энергетики, геофизики и астрофизики. Данные исследования достаточно детально изучены для случая, когда в уравнении Навье – Стокса в выражении подъемной силы вектор силы тяжести направлен вертикально вниз. При исследовании теплообмена электропроводной жидкости существует ряд задач, когда в уравнении Навье – Стокса в выражении подъемной силы имеет место принципиальное различие – вектор силы тяжести направлен по радиусу к центру (или от центра) сферического слоя, а не вертикально вниз. Таких работ еще недостаточно. Поэтому исследование конвективного теплообмена электропроводной жидкости в сферическом слое (вектор силы тяжести направлен по радиусу к центру или от центра сферического слоя) и его эволюции при учете диссипации джоулева тепла, инерционных, вязких, подъемных и магнитных сил является актуальной задачей. *Материалы и методы.* Для решения задачи используется метод конечных элементов. В безразмерной форме задача в переменных вихрь, функция тока, температура и магнитная индукция решается в сферической системе координат с учетом симметрии по долготе. *Результаты.* Исследовано влияние малых значений магнитного числа Рейнольдса на эволюцию полей температуры, функции тока, вихря, радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции и распределения локальных чисел Нуссельта в сферическом слое электропроводной жидкости. Установлено, что влияние диссипации джоулева тепла на теплообмен и магнитную гидродинамику жидкости возрастает с уменьшением магнитного числа Рейнольдса. Определено пороговое значение магнитного числа Рейнольдса и время, при которых происходит изменение интенсивности теплообмена на поверхностях сферического слоя жидкости. *Выводы.* Полученные результаты могут быть использованы при проектировании тепловых и магнитогидродинамических процессов в энергетических аппаратах, приборах и объектах, когда необходимо обеспечить максимум теплового потока на внутренней или внешней поверхности (в зависимости от поставленной задачи) сферического слоя жидкости.

Ключевые слова: математическое моделирование, нестационарный конвективный теплообмен, магнитная гидродинамика, сферические слои

Для цитирования: Соловьев С. В. Теплообмен и магнитная гидродинамика жидкости в сферическом слое. Часть 1 // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 3. С. 31–45. doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-3

Heat transfer and magnetic hydrodynamics of liquid in a spherical layer. Part 1

© Соловьев С. В., 2023. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

S.V. Solov'ev

Computing Center of Far Eastern Branch
of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia
solovjovsv@rambler.ru

Abstract. *Background.* The processes of heat transfer of an electrically conductive liquid in closed volumes (in particular, in spherical concentric layers) play an important role for a wide range of problems in space technology, nuclear energy, geophysics and astrophysics. These studies have been studied in sufficient detail for the case when in the Navier-Stokes equation in the expression for the lift force the gravity vector is directed vertically downwards. When studying the heat transfer of an electrically conductive fluid, there are a number of problems when there is a fundamental difference in the Navier-Stokes equation in the expression for the lifting force – the gravity vector is directed along the radius to the center (or away from the center) of the spherical layer, and not vertically down. Such work is still not enough. Therefore, the study of the convective heat transfer of an electrically conductive fluid in a spherical layer (the gravity vector is directed along the radius towards or away from the center of the spherical layer) and its evolution, taking into account the dissipation of the Joule heat, inertial, viscous, lifting and magnetic forces, is an actual task. *Materials and methods.* The finite element method is used to solve the problem. In a dimensionless form, the problem in variables vortex, stream function, temperature and magnetic induction is solved in a spherical coordinate system, taking into account symmetry in longitude. *Results.* The influence of small values of the magnetic Reynolds number on the evolution of the temperature fields, the current function, the vortex, the radial and meridional components of the magnetic induction, and the distribution of local Nusselt numbers in a spherical layer of an electrically conductive liquid is studied. It has been found that the influence of Joule heat dissipation on heat transfer and magnetic hydrodynamics of the fluid increases with decreasing magnetic Reynolds number. The threshold value of the magnetic Reynolds number and the time at which the intensity of heat transfer on the surfaces of the spherical liquid layer changes occur are determined. *Conclusions.* The results obtained can be used in the design of thermal and magnetohydrodynamics processes in power apparatuses, devices and objects, when it is necessary to provide a maximum heat flux on the inner or outer surface (depending on the task) of a spherical liquid layer.

Keywords: mathematical modeling, unsteady convective heat transfer, magnetohydrodynamics, spherical layers

For citation: Solov'ev S.V. Heat transfer and magnetic hydrodynamics of liquid in a spherical layer. Part 1. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(3):31–45. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-3

Введение

Физические процессы магнитной гидродинамики (МГД) присутствуют в ряде областей физики, астрофизики, аэродинамики больших скоростей, МГД-генераторах, электромагнитных насосах, плазменных ускорителях, сферических термоядерных реакторах, металлургии, в измерительной технике [1–9]. При изучении магнитной гидродинамики рассматриваются два класса задач, которые определяются величиной магнитного числа Рейнольдса Re_m : $Re_m \ll 1$ (жидкость с малой проводимостью, например низкотемпературная плазма) и $Re_m \gg 1$ (жидкость с большой проводимостью или объект с большими размерами, например: высокотемпературная плазма, астрофизические объекты). Настоящая работа является продолжением исследований [10–13],

в которых изучались процессы конвективного теплообмена и магнитной гидродинамики электропроводной жидкости в сферических слоях с учетом ориентации вектора силы тяжести, граничных условий для температуры (первого и смешанного типов), диссипации джоулева тепла и различных значений чисел подобия. В данной работе исследуется влияние малых значений магнитного числа Рейнольдса ($Re_m = 10^{-1}-10^{-5}$) на эволюцию теплообмена и магнитной гидродинамики электропроводной жидкости, заключенной между двумя концентрическими изотермическими сферами, при равном влиянии: инерционных и вязких сил ($Re = 1$), силы электромагнитного взаимодействия и инерционной силы (параметр магнитного взаимодействия $S = 1$), сил магнитного взаимодействия и сил вязкости (число Гартманна $G = 1$) с учетом диссипации джоулева тепла. Вектор силы тяжести направлен по радиусу к центру сферического слоя.

1. Постановка задачи

Задача конвективного теплообмена электропроводной жидкости в сферическом слое описывается уравнениями магнитной гидродинамики: движения, энергии и магнитной индукции. Используется приближение Буссинеска. Задача решалась в переменных: вихрь (ω), функция тока (ψ), температура (ϑ), магнитная индукция (B_r, B_θ). Безразмерная постановка задачи в сферической системе координат с учетом симметрии по долготе имеет вид [12]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Ho} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \omega \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \\ & = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \\ & - \frac{Gr}{Re^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + \frac{S}{Re_m} \left(B_r \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + 2 \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{B_r}{r} \frac{\partial^2 B_r}{\partial r \partial \theta} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{2B_\theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right), \\ & \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\omega r \sin \theta, \\ & \frac{1}{Ho} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) - \frac{J}{Pe} \left(\frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} B_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right)^2 = 0, \\ & \frac{1}{Ho} \frac{\partial B_r}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + B_r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{Re_m} \left(\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{2B_r}{r^2} - \frac{2B_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right), \\
 & \frac{1}{Ho} \frac{\partial B_\theta}{\partial \tau} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(-B_r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \right) + \\
 & + \frac{1}{Re_m} \left(\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right).
 \end{aligned}$$

Обозначения величин приведены в работе [11]. Для температуры на внутренней Γ_1 ($r = 1$) и внешней Γ_2 ($r = r_2$) границах сферического слоя задавались граничные условия первого рода: $\vartheta|_{\Gamma_1} = 1$; $\vartheta|_{\Gamma_2} = 0$ (внутренняя сфера более нагрета). На оси симметрии сферического слоя $\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right|_{\theta=0,\pi} = 0$. Граничные условия для функции тока и магнитной индукции [11]:

$$\begin{aligned}
 \psi|_{\Gamma_{1,2}} = \psi|_{\theta=0,\pi} = \omega|_{\theta=0,\pi} = 0; \quad \left. \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right|_{\theta=0,\pi} = \left. \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=0,\pi} = 0; \\
 B_r|_{\Gamma_1} = B_r|_{\Gamma_2} = 0; \quad B_\theta|_{\Gamma_1} = -0,01 \sin \theta; \quad B_\theta|_{\Gamma_2} = 0,01 \sin \theta.
 \end{aligned}$$

Граничные условия для вихря на границах сферического слоя предполагают линейное изменение его по нормали. В начальный момент времени значения расчетных функций приняты равными нулю. Локальные и осредненные числа Нуссельта на поверхностях внутренней и наружной сфер рассчитывались по формулам:

$$\begin{aligned}
 Nu_1 = - \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right|_{\Gamma_1}, \quad Nu_2 = -r_2 \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right|_{\Gamma_2}. \\
 \overline{Nu_1} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right]_{\Gamma_1} \sin \theta d\theta, \quad \overline{Nu_2} = -\frac{r_2}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right]_{\Gamma_2} \sin \theta d\theta.
 \end{aligned}$$

Численное решение задачи осуществлялось методом конечных элементов [13]. Расчеты выполнялись для следующих значений критериев подобия: $Gr = 10^4$; $Re = Pe = S = G = 1$, $Re_m = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$; $Ho = 0,1$; отношение внешнего радиуса сферического слоя к внутреннему $r_2 = R_2/R_1 = 2/1$.

2. Результаты

На рис. 1–5 приведены поля температуры, функции тока, вихря, магнитной индукции и распределения чисел Нуссельта при $Ho = 0,1$ (влияние локальной составляющей ускорения движения жидкости в десять раз значительнее влияния конвективной составляющей) для моментов времени $t - \tau = 0,2$; $2 - \tau = 0,5$; $3 - \tau = 1$; $4 - \tau = 5$; $5 - \tau = 6$; $6 - \tau = 7$, позволяющих проследить эволюцию теплообмена от начального до квазистационарного режимов.

На рис. 1 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^{-1}$. Теплообмен в слое жидкости для $\tau = 0,2-1$ осуществляется теплопроводностью (рис. 1, *a*: 1–3). Изотермы поля температуры представляют собой концентрические окружности.

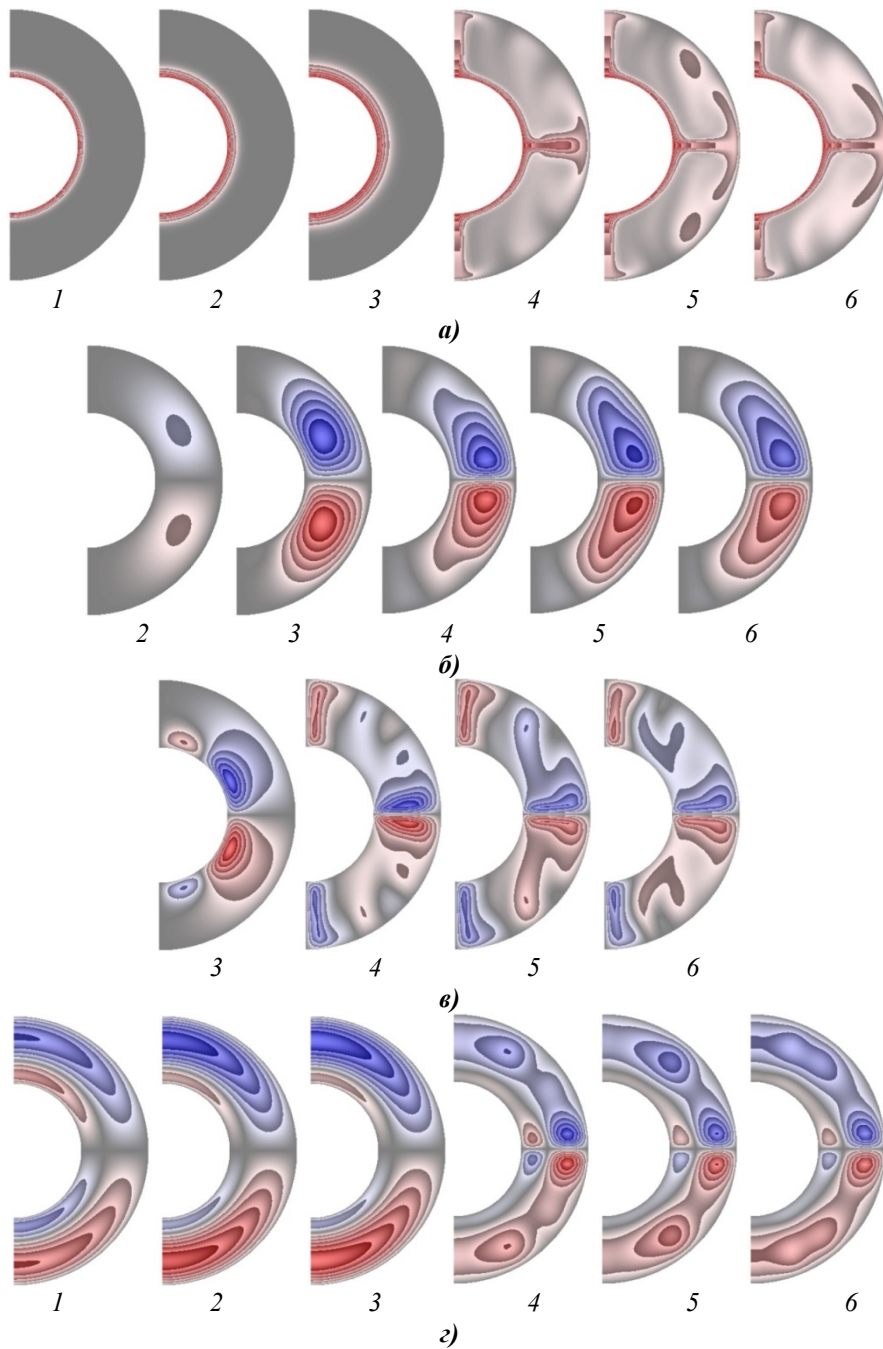


Рис. 1. Поля температуры (*a*), функции тока (*б*), вихря (*в*), радиальной (*з*) и меридиональной (*д*) составляющих магнитной индукции, распределение чисел Нуссельта (*е*)

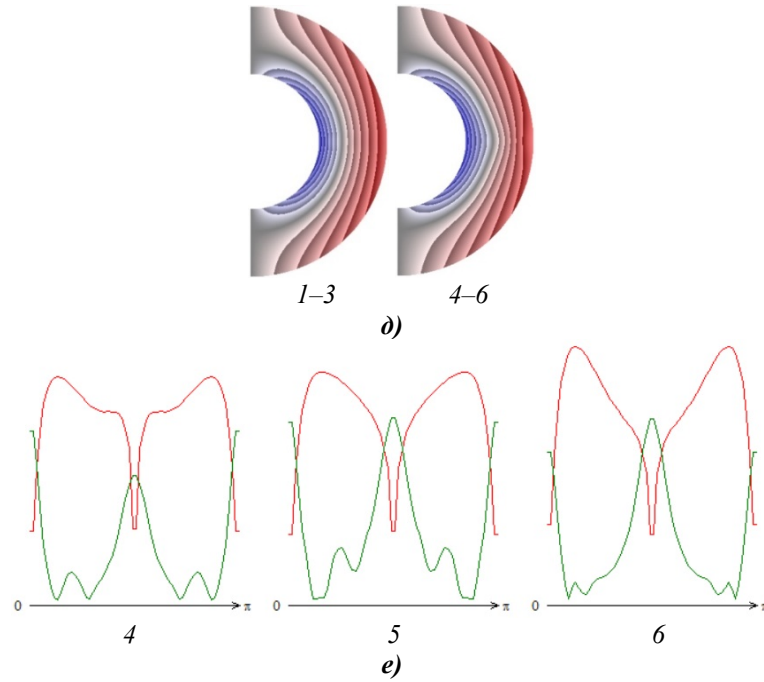


Рис. 1. Окончание

С течением времени механизм теплообмена теплопроводностью изменяется на конвективный, в результате чего происходит перестройка поля температуры (рис. 1,а: 4–6). Для $\tau = 6$ в поле температуры образуются две температурные каверны (рис. 1,а: 5). Максимальное значение температуры жидкости $\theta_{\max} = 1$. Распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней (красный цвет) и внешней (зеленый цвет) поверхности сферического слоя жидкости представлено на рис. 1,е. Интервалы изменения локальных и значения осредненных чисел Нуссельта следующие:

$$\tau = 0,2: Nu_1 = \overline{Nu}_1 = 13,400; Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 0. \tau = 0,5: Nu_1 = \overline{Nu}_1 = 8,816;$$

$$Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 0,001. \tau = 1: Nu_1 = \overline{Nu}_1 = 6,515; Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 0,001.$$

$$\tau = 5: \overline{Nu}_1 = 11,333; \overline{Nu}_2 = 2,895; 4,413 \leq Nu_1 \leq 13,511; 0,338 \leq Nu_2 \leq 10,306.$$

$$\tau = 6: \overline{Nu}_1 = 11,468; \overline{Nu}_2 = 4,547; 4,188 \leq Nu_1 \leq 13,804; 0,376 \leq Nu_2 \leq 11,104.$$

$$\tau = 7: \overline{Nu}_1 = 11,443; \overline{Nu}_2 = 4,123; 4,221 \leq Nu_1 \leq 15,290; 0,396 \leq Nu_2 \leq 11,010.$$

Интенсивность теплообмена на внутренней поверхности слоя выше, чем на внешней (такая ситуация сохраняется для $Re_m = 10^{-2}-10^{-4}$). В слое жидкости образуются две (для $\tau = 0,2$ поле функции тока еще не сформировалось) конвективные ячейки (рис. 1,б: 2, 3), в которых в северном полушарии значения функции тока отрицательные (знак «-», синий цвет) – жидкость движется по часовой стрелке, а в южном полушарии значения функции тока положительные (знак «+», красный цвет) – жидкость движется против часовой стрелки.

В области течения жидкости (рис. 1,б: 3) образуются четыре вихря (для $\tau = 0,2$ и $0,5$ поле вихря еще не сформировалось). Знаки величин вихрей от северного полюса к южному изменяются в последовательности: «+», «-», «+», «-». С течением времени форма конвективных ячеек и вихрей претерпевает значительные изменения (рис. 1,б,в: 4–6). Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{\max}| = 3,70 \cdot 10^{-3}$ ($\tau = 0,5$ и 1); $|\Psi_{\max}| = 9,74$ ($\tau = 5-7$); $|\omega_{\max}| = 8,73 \cdot 10^{-2}$ ($\tau = 1$); $|\omega_{\max}| = 2,66 \cdot 10^2$ ($\tau = 5-7$). На рис. 1,з,д представлены поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции. Для $\tau = 0,2-1$ значения радиальной составляющей магнитной индукции в северном полушарии положительные у внутренней поверхности слоя и отрицательные у внешней (рис. 1,з: 1–3). В южном полушарии тенденция противоположная. При $\tau = 5-7$ структура поля магнитной индукции изменяется, в жидкости образуются четыре «магнитные ячейки»: две мелкомасштабные вблизи внутренней поверхности и две крупномасштабные вблизи внешней (рис. 1,з: 4–6). Знаки величин «магнитных ячеек» радиальной составляющей магнитной индукции от северного полюса к южному изменяются в последовательности «-», «+» в основной области течения жидкости и «+», «-» вблизи внутренней поверхности. Значения меридиональной составляющей магнитной индукции положительные у внешней поверхности слоя и отрицательные у его внутренней поверхности (рис. 1,д). С течением времени кривизна изолиний поля меридиональной составляющей магнитной индукции в области экватора (рис. 1,д: 4–6) увеличивается по сравнению с результатом, приведенным на рис. 1,д: 1–3. Максимальные значения радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции $|B_{r\max}| = 4,84 \cdot 10^{-4}$ ($\tau = 0,2-7$); $|B_{\theta\max}| = 10^{-2}$ ($\tau = 0,2-7$; сохраняется для всех рассмотренных режимов).

На рис. 2 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^{-2}$. По сравнению с результатами, полученными для $Re_m = 10^{-1}$ (рис. 1), уменьшение магнитного числа Рейнольдса на порядок приводит к изменению поля температуры, формы конвективных ячеек и вихрей (рис. 2,а,б,в: 4–6) и поля магнитной индукции (рис. 2,з,д). Поля при $\tau = 0,2-1$ качественно аналогичны соответствующим результатам для $Re_m = 10^{-1}$. $\theta_{\max} = 1$. Числа Нуссельта:

$$\tau = 0,2: Nu_1 = \overline{Nu}_1 = 13,398; Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 0,004. \tau = 0,5: Nu_1 = \overline{Nu}_1 = 8,813;$$

$$Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 0,006. \tau = 1: Nu_1 = \overline{Nu}_1 = 6,511; Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 0,008.$$

$$\tau = 5: \overline{Nu}_1 = 11,028; \overline{Nu}_2 = 4,840; 4,217 \leq Nu_1 \leq 13,115; 0,311 \leq Nu_2 \leq 12,899.$$

$$\tau = 6: \overline{Nu}_1 = 11,952; \overline{Nu}_2 = 4,392; 4,266 \leq Nu_1 \leq 15,350; 0,329 \leq Nu_2 \leq 11,742.$$

$$\tau = 7: \overline{Nu}_1 = 11,043; \overline{Nu}_2 = 4,020; 3,924 \leq Nu_1 \leq 15,536; 0,336 \leq Nu_2 \leq 10,614.$$

$$|\Psi_{\max}| = 3,87 \cdot 10^{-2} (\tau = 0,5 \text{ и } 1); |\Psi_{\max}| = 8,84 (\tau = 5, 6 \text{ и } 7); |\omega_{\max}| = 9,40 \cdot 10^{-1}$$

$$(\tau = 1); |\omega_{\max}| = 1,87 \cdot 10^2 (\tau = 5, 6 \text{ и } 7), |B_{r\max}| = 4,83 \cdot 10^{-4} (\tau = 0,2; 0,5 \text{ и } 1);$$

$$|B_{r\max}| = 4,73 \cdot 10^{-4} (\tau = 5, 6 \text{ и } 7).$$

На рис. 3 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^{-3}$.

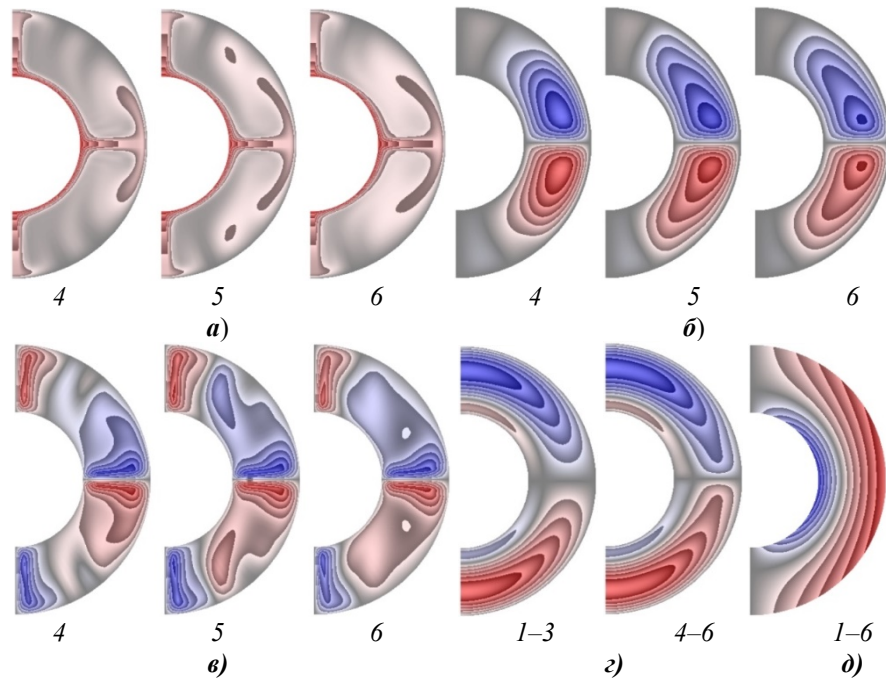


Рис. 2. Поля температуры (*a*), функции тока (*b*), вихря (*v*), радиальной (*z*) и меридиональной (*d*) составляющих магнитной индукции

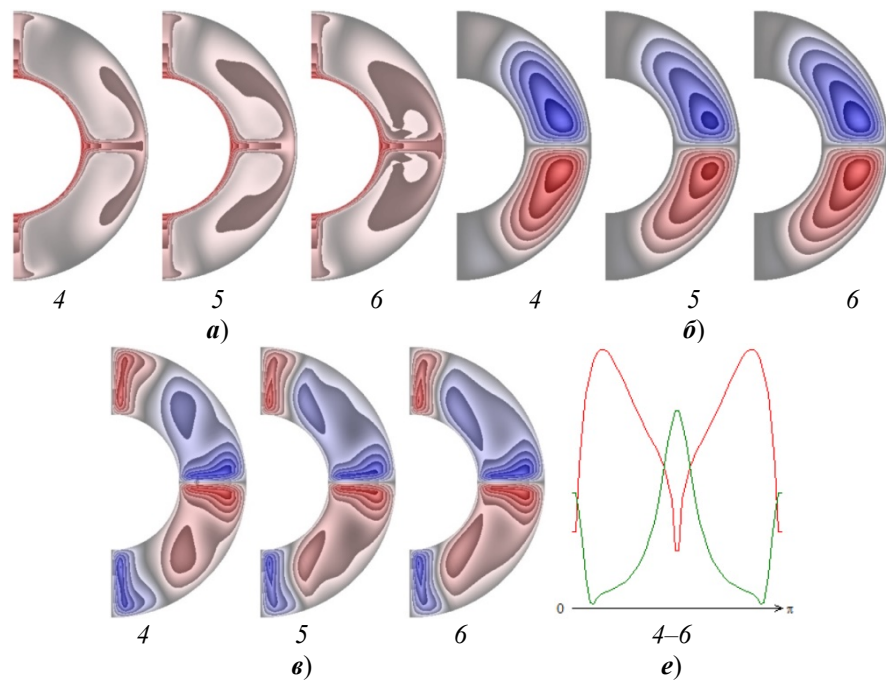


Рис. 3. Поля температуры (*a*), функции тока (*b*), вихря (*v*), распределение чисел Нуссельта (*e*)

По сравнению с результатами, полученными для $Re_m = 10^{-1}$ и 10^{-2} (рис. 1, 2), уменьшение магнитного числа Рейнольдса приводит к изменению

поля температуры (рис. 3,*а*: 4–6), формы конвективных ячеек и вихрей (рис. 3,*б,в*, 4–6) и распределения чисел Нуссельта (рис. 3,*е*). Поле радиальной составляющей магнитной индукции для $Re_m = 10^{-3}$ и $\tau = 0,2-7$ аналогично результату, приведенному на рис. 2,*з*: 1–3. Остальные поля качественно аналогичны результатам, полученным для режима $Re_m = 10^{-2}$. Числа Нуссельта принимают следующие значения:

$$\tau = 0,2: \overline{Nu}_1 = 13,383; \overline{Nu}_2 = 0,035; 13,365 \leq Nu_1 \leq 13,402; 0 \leq Nu_2 \leq 0,066.$$

$$\tau = 0,5: \overline{Nu}_1 = 8,787; \overline{Nu}_2 = 0,059; 8,717 \leq Nu_1 \leq 8,848; 0 \leq Nu_2 \leq 0,110.$$

$$\tau = 1: \overline{Nu}_1 = 6,491; \overline{Nu}_2 = 0,085; 5,996 \leq Nu_1 \leq 6,843; 0 \leq Nu_2 \leq 0,157.$$

$$\tau = 5: \overline{Nu}_1 = 11,700; \overline{Nu}_2 = 4,627; 4,196 \leq Nu_1 \leq 14,468; 0,197 \leq Nu_2 \leq 11,758.$$

$$\tau = 6: \overline{Nu}_1 = 12,129; \overline{Nu}_2 = 4,446; 4,263 \leq Nu_1 \leq 16,460; 0,253 \leq Nu_2 \leq 11,257.$$

$$\tau = 7: \overline{Nu}_1 = 11,970; \overline{Nu}_2 = 4,880; 3,802 \leq Nu_1 \leq 16,877; 0,320 \leq Nu_2 \leq 12,860.$$

$$\theta_{\max} = 1. |\Psi_{\max}| = 3,92 \cdot 10^{-1} (\tau = 0,5 \text{ и } 1); |\Psi_{\max}| = 9,01 (\tau = 5-7); |\omega_{\max}| = 9,77$$

$$(\tau = 1); |\omega_{\max}| = 1,88 \cdot 10^2 (\tau = 5-7), |B_{r\max}| = 4,83 \cdot 10^{-4} (\tau = 0,2-7).$$

На рис. 4 приведены результаты для $Re_m = 10^{-4}$. Уменьшение значения магнитного числа Рейнольдса приводит к возникновению конвективного механизма теплообмена в жидкости уже на начальной стадии при $\tau = 0,2$ (рис. 4,*е*: 1).

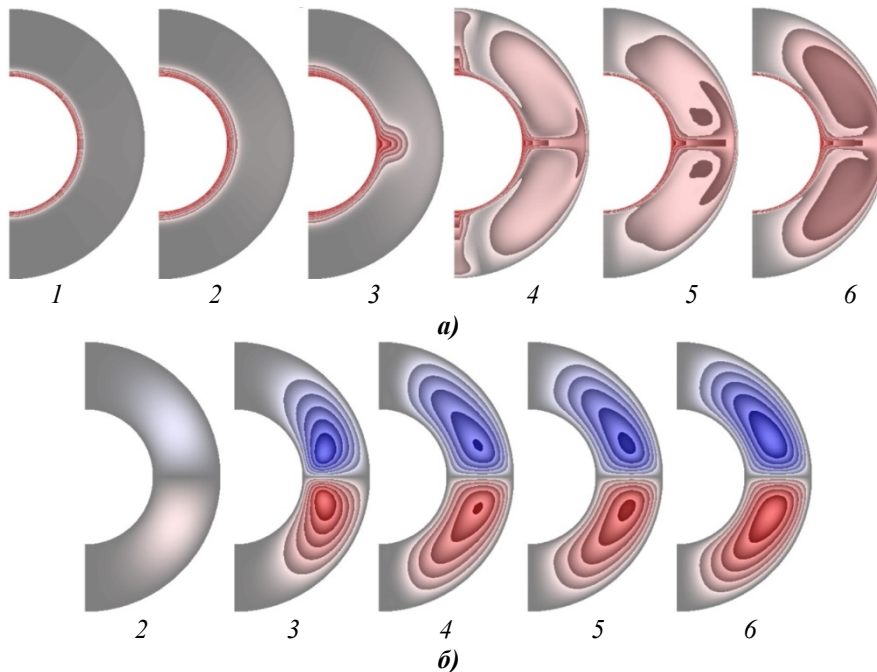


Рис. 4. Поля температуры (*а*), функции тока (*б*), вихря (*в*), распределение чисел Нуссельта (*г*)

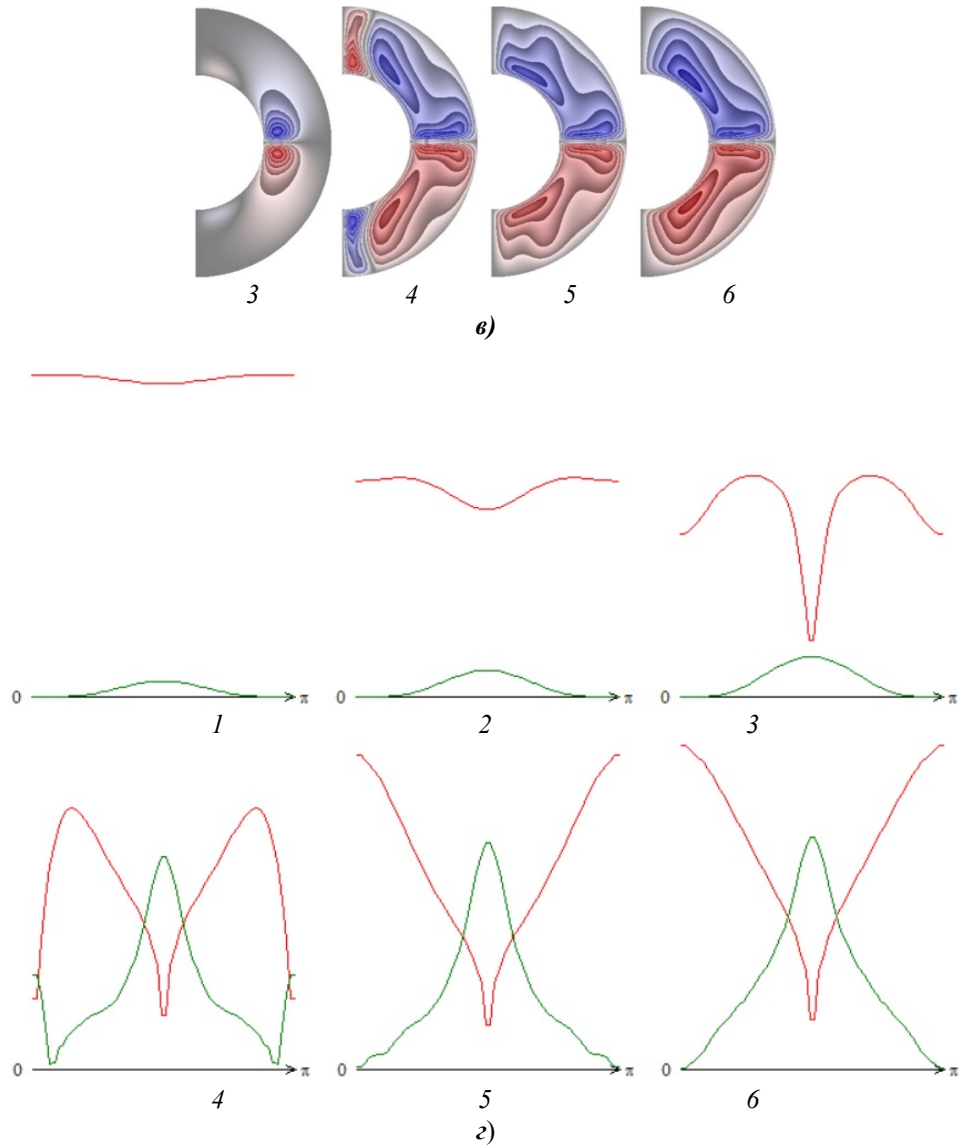


Рис. 4. Окончание

$\theta_{\max} = 1$. Распределение чисел Нуссельта становится характерным для конвективного теплообмена (рис. 4,е). Поле радиальной составляющей магнитной индукции для $Re_m = 10^{-4}$ и $\tau = 0,2-7$ аналогично результату, приведенному на рис. 2,з: 1–3. Поля меридиональной составляющей магнитной индукции и функции тока аналогичны соответствующим результатам, представленным на рис. 2,д: 1–6 и рис. 3,б. Числа Нуссельта:

$$\tau = 0,2: \overline{Nu}_1 = 13,232; \overline{Nu}_2 = 0,350; 13,052 \leq Nu_1 \leq 13,420; 0 \leq Nu_2 \leq 0,655.$$

$$\tau = 0,5: \overline{Nu}_1 = 8,554; \overline{Nu}_2 = 0,593; 7,837 \leq Nu_1 \leq 9,140; 0 \leq Nu_2 \leq 1,102.$$

$$\tau = 1: \overline{Nu}_1 = 7,854; \overline{Nu}_2 = 0,916; 2,340 \leq Nu_1 \leq 9,236; 0 \leq Nu_2 \leq 1,669.$$

$\tau = 5$: $\overline{Nu}_1 = 13,116$; $\overline{Nu}_2 = 6,942$; $3,886 \leq Nu_1 \leq 18,630$; $0,373 \leq Nu_2 \leq 15,177$.

$\tau = 6$: $\overline{Nu}_1 = 12,087$; $\overline{Nu}_2 = 7,152$; $3,164 \leq Nu_1 \leq 22,428$; $0,221 \leq Nu_2 \leq 16,181$.

$\tau = 7$: $\overline{Nu}_1 = 13,678$; $\overline{Nu}_2 = 8,310$; $3,611 \leq Nu_1 \leq 23,141$; $0,144 \leq Nu_2 \leq 16,611$.

$|\Psi_{\max}| = 4,36$ ($\tau = 0,5$ и 1); $|\omega_{\max}| = 1,62 \cdot 10^2$ ($\tau = 0,5$ и 1); $|\Psi_{\max}| = 1,10 \cdot 10$

($\tau = 5-7$); $|\omega_{\max}| = 1,79 \cdot 10^2$ ($\tau = 5-7$), $|B_{r\max}| = 4,83 \cdot 10^{-4}$ ($\tau = 0,2-7$).

На рис. 5 приведены результаты для $Re_m = 10^{-5}$. Все поля, полученные для данного режима (рис. 5), изменяются и имеют значительные различия в сравнении с соответствующими результатами, представленными на рис. 1–4. Поле температуры, вихря и распределение чисел Нуссельта (рис. 4, *a, в, e*) отличаются от соответствующих результатов, приведенных на рис. 3, *a, в, e*.

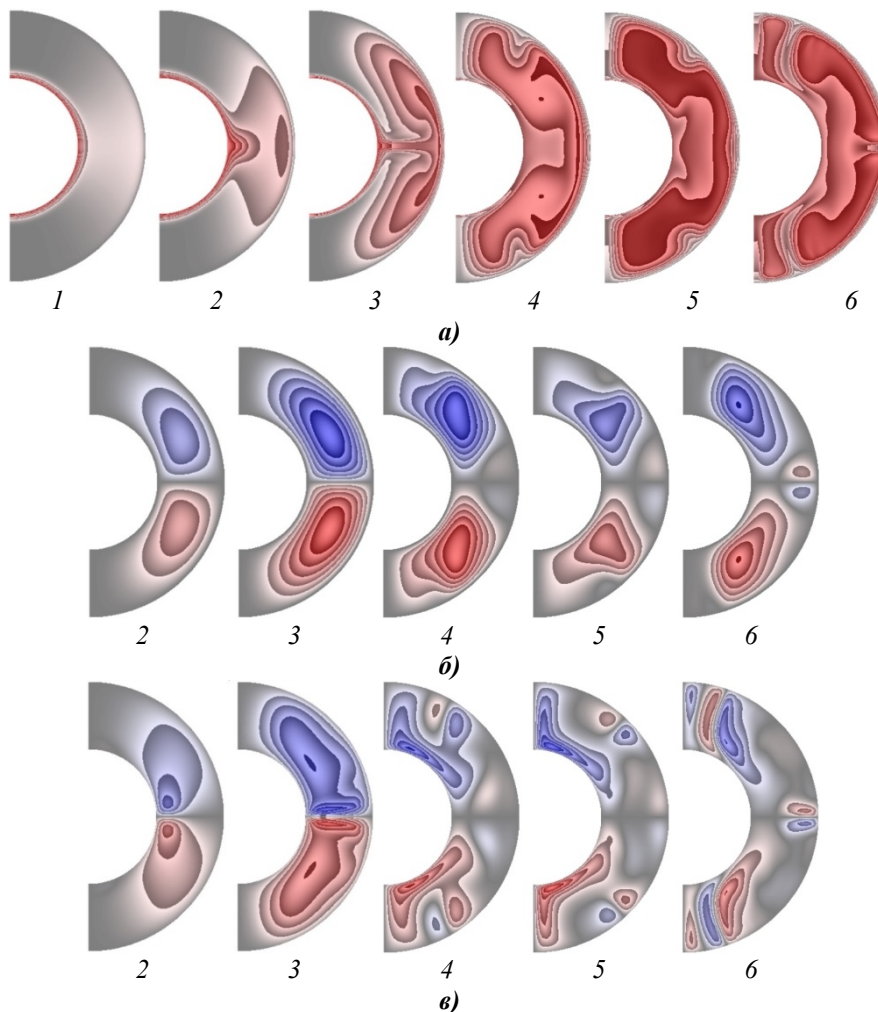


Рис. 5. Поля температуры (*a*), функции тока (*б*), вихря (*в*), распределение чисел Нуссельта (*г*), зависимость осредненных чисел Нуссельта от времени (*д*)

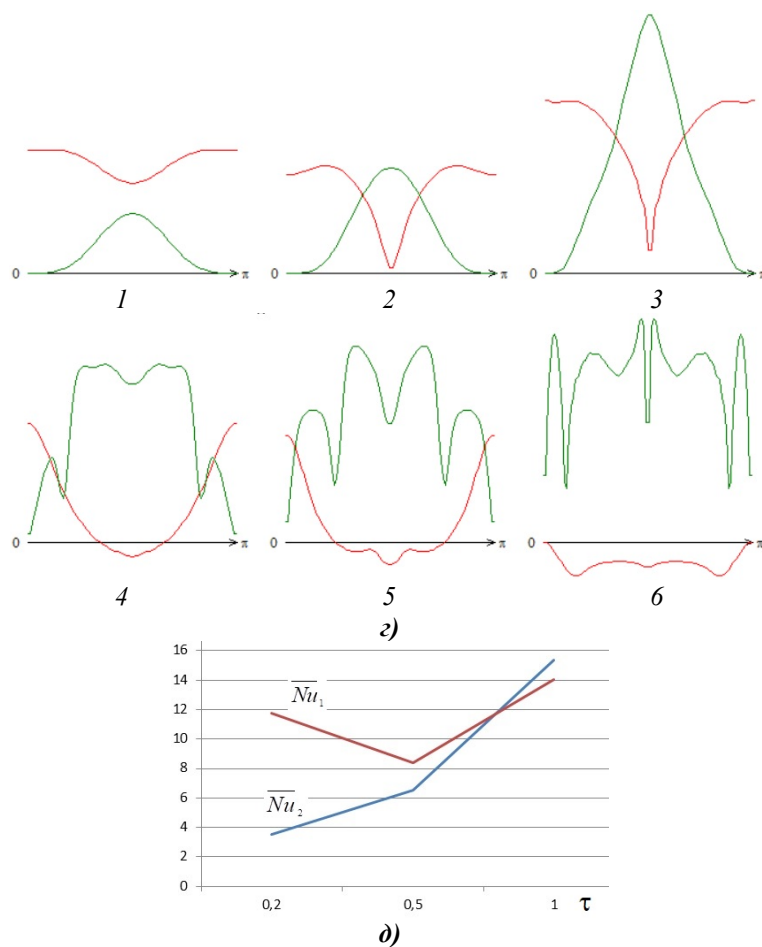


Рис. 5. Окончание

С течением времени происходит увеличение температуры жидкости от $\theta_{\max} = 1$ ($\tau = 0,2-1$) до значения $\theta_{\max} = 1,903$ ($\tau = 5-7$). $|\psi_{\max}| = 1,47 \cdot 10$ ($\tau = 0,5$ и 1); $|\omega_{\max}| = 2,12 \cdot 10^2$ ($\tau = 0,5$ и 1); $|\Psi_{\max}| = 1,24 \cdot 10$ ($\tau = 5-7$); $|\omega_{\max}| = 6,34 \cdot 10^2$ ($\tau = 5-7$), $|B_{r\max}| = 4,83 \cdot 10^{-4}$ ($\tau = 0,2-1$). $|B_{r\max}| = 4,84 \cdot 10^{-4}$ ($\tau = 5-7$). Числа Нуссельта:

$$\tau = 0,2: \overline{Nu}_1 = 11,776; \overline{Nu}_2 = 3,528; 9,944 \leq Nu_1 \leq 13,606; 0 \leq Nu_2 \leq 6,570.$$

$$\tau = 0,5: \overline{Nu}_1 = 8,376; \overline{Nu}_2 = 6,536; 0,666 \leq Nu_1 \leq 11,830; 0 \leq Nu_2 \leq 11,624.$$

$$\tau = 1: \overline{Nu}_1 = 14,058; \overline{Nu}_2 = 15,328; 2,506 \leq Nu_1 \leq 18,997;$$

$$0,005 \leq Nu_2 \leq 28,437.$$

$$\tau = 5: \overline{Nu}_1 = 3,217; \overline{Nu}_2 = 32,368; -3,062 \leq Nu_1 \leq 25,791; 1,955 \leq Nu_2 \leq 38,647.$$

$$\tau = 6: \overline{Nu}_1 = 0,223; \overline{Nu}_2 = 32,094; -4,793 \leq Nu_1 \leq 23,120; 4,476 \leq Nu_2 \leq 42,665.$$

$$\tau = 7: \overline{Nu}_1 = -4,796; \overline{Nu}_2 = 38,466; -7,160 \leq Nu_1 \leq 0,090;$$

$$11,653 \leq Nu_2 \leq 48,568.$$

При $\tau = 0,2$ и $0,5$ интенсивность теплообмена на внутренней поверхности слоя выше, чем на внешней, а при $\tau \in [1; 7]$ интенсивность теплообмена на внешней поверхности слоя выше, чем на внутренней. Значение времени τ_* , характеризующее изменение интенсивности теплообмена на поверхностях слоя жидкости, находится из равенства $\overline{Nu}_1 = \overline{Nu}_2$ (рис. 5,б), откуда $\tau_* \approx 0,80$ ($\overline{Nu}_1 = \overline{Nu}_2 = 11,785$).

Заключение

Полученные результаты позволяют проследить эволюцию и влияние магнитного числа Рейнольдса на тепловые и магнитогидродинамические поля жидкости в сферическом слое. С уменьшением магнитного числа Рейнольдса вклад диссипации Джоулева тепла возрастает, что приводит к значительному изменению тепловых и магнитогидродинамических полей. В результате численных экспериментов установлено, что для $Re_m = 10^{-1}-10^{-4}$ и $\tau \in [0,2; 7]$ интенсивность теплообмена на внутренней поверхности слоя выше, чем на внешней. Определено пороговое значение магнитного числа Рейнольдса $Re_m^* = 10^{-5}$ и время $\tau_* \approx 0,80$, при которых интенсивность теплообмена на внешней поверхности слоя становится значительнее, чем на внутренней (для $\tau \in (0,80; 7]$). Показано, что для $Re_m = 10^{-2}-10^{-5}$ и $\tau \in [0,2; 7]$ поле меридиональной составляющей магнитной индукции не изменяется. Математическая модель и полученные результаты могут быть полезными при проектировании тепловых и магнитогидродинамических процессов в энергетических аппаратах, приборах и объектах, когда необходимо обеспечить максимум теплового потока на внутренней или внешней поверхности (в зависимости от поставленной задачи) сферического слоя жидкости.

Список литературы

1. Mc Bain G. D. Convection in a horizontally heated sphere // Journal of Fluid Mechanics. 2001. Vol. 438. P. 1–10.
2. Mochimaru Yo. Transient natural convection heat transfer in a spherical cavity // Heat Transfer – Japanese Research. 1989. Vol. 18, № 4. P. 9–19.
3. Whitley H. G., Vachon R. I. Transient laminar free convection in closed spherical containers // J. Heat Transfer, Trans ASME, Series C. 1972. Vol. 94. P. 360–366.
4. Рязских В. И., Слюсарев М. И., Богер А. А., Зайцев В. А. Синтез математической модели естественной конвекции вязкой несжимаемой жидкости в сферической емкости // Вестник Воронежского государственного технического университета. Серия: Энергетика. 2003. № 7.3. С. 14–17.
5. Рязских В. И., Слюсарев М. И., Зайцев В. А. Анализ свободной термоконвекции в сферических резервуарах при граничных условиях второго рода // Вестник Воронежского государственного технического университета. Серия: Энергетика. 2004. № 7.4. С. 5–10.
6. Hutchins J., Marschall E. Pseudosteady-state natural convection heat transfer inside spheres // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1989. Vol. 32, № 11. P. 2047–2053.

7. Bozhko A. A., Kuchukova M. T., Putin G. F. The influence of external uniform magnetic field on convection in magnetic fluid filling a spherical cavity // *Magnetohydrodynamics*. 2013. Vol. 49, № 1. P. 161–168.
8. Кучукова М. Т. Влияние магнитного поля на конвекцию магнитной жидкости в шаровой полости // *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2011. № 5 (9). С. 118–121.
9. Yih C.-S. Convective instability of a spherical fluid inclusion // *Physics of Fluids*. 1986. Vol. 30, iss. 1. P. 36–44.
10. Соловьев С. В. Исследование нестационарного теплообмена электропроводной жидкости в сферическом слое // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2018. № 4. С. 20–32.
11. Solov'ev S. V. Heat exchange and magnetic hydrodynamics of a liquid in a spherical layer at small magnetic Reynolds numbers // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2022. Vol. 95, № 6. P. 1406–1420.
12. Solov'ev S. V. Influence of the Homochronism Number of the Liquid in a Spherical Layer on the Heat Exchange in it and its Magnetic Hydrodynamics // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2020. Vol. 93, № 3. P. 567–575.
13. Solov'ev S. V. Simulation of Convective Heat Exchange in the Electrically Conducting Liquid in a Spherical Cavity. Algorithm of Solution // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2015. Vol. 88, iss. 6. P. 1416–1431.

References

1. Ms Bain G.D. Convection in a horizontally heated sphere. *Journal of Fluid Mechanics*. 2001;438:1–10.
2. Mochimaru Yo. Transient natural convection heat transfer in a spherical cavity. *Heat Transfer – Japanese Research*. 1989;18(4):9–19.
3. Whitley H.G., Vachon R.I. Transient laminar free convection in closed spherical containers. *J. Heat Transfer, Trans ASME, Series C*. 1972;94:360–366.
4. Ryazhskikh V.I., Slyusarev M.I., Boger A.A., Zaytsev V.A. Synthesis of a mathematical model of natural convection of a viscous incompressible fluid in a spherical container. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Energetika = Bulletin of Voronezh State Technical University. Series: Energetics*. 2003;(7.3):14–17. (In Russ.)
5. Ryazhskikh V.I., Slyusarev M.I., Zaytsev V.A. Analysis of free thermal convection in spherical tanks under boundary conditions of the second kind. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Energetika = Bulletin of Voronezh State Technical University. Series: Energetics*. 2004;(7.4):5–10. (In Russ.)
6. Hutchins J., Marschall E. Pseudosteady-state natural convection heat transfer inside spheres. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1989;32(11):2047–2053.
7. Bozhko A.A., Kuchukova M.T., Putin G.F. The influence of external uniform magnetic field on convection in magnetic fluid filling a spherical cavity. *Magnetohydrodynamics*. 2013;49(1):161–168.
8. Kuchukova M.T. Effect of a Magnetic Field on the Convection of a Ferrofluid in a ball cavity. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika = Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2011;(5):118–121. (In Russ.)
9. Yih C.-S. Convective instability of a spherical fluid inclusion. *Physics of Fluids*. 1986;30(1):36–44.
10. Solov'ev S.V. Simulation of non-stationary heat exchange of electro-conductive liquid in a spherical layer. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2018;(4):20–32. (In Russ.)
11. Solov'ev S.V. Heat exchange and magnetic hydrodynamics of a liquid in a spherical layer at small magnetic Reynolds numbers. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2022;95(6):1406–1420.

12. Solov'ev S.V. Influence of the Homochronism Number of the Liquid in a Spherical Layer on the Heat Exchange in it and its Magnetic Hydrodynamics. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2020;93(3):567–575.
13. Solov'ev S.V. Simulation of Convective Heat Exchange in the Electrically Conducting Liquid in a Spherical Cavity. Algorithm of Solution. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2015;88(6):1416–1431.

Информация об авторах / Information about the authors

Сергей Викторович Соловьев

доктор физико-математических наук,
профессор, ведущий научный
сотрудник, Вычислительный центр
Дальневосточного отделения Российской
академии наук (Россия, г. Хабаровск,
ул. Ким Ю Чена, 65)

E-mail: solovjovsv@rambler.ru

Sergey V. Solov'ev

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, leading researcher,
Computing Center of Far Eastern Branch
of the Russian Academy of Sciences
(65 Kim Yu Chen street, Khabarovsk,
Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 19.12.2022

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 24.04.2023

Принята к публикации / Accepted 06.06.2023